Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

Σ Χ Ο Λ Η   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Ω Ν
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ω Ν   Κ Α Ι   Φ Υ Σ Ι Κ Ω Ν   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ω Ν

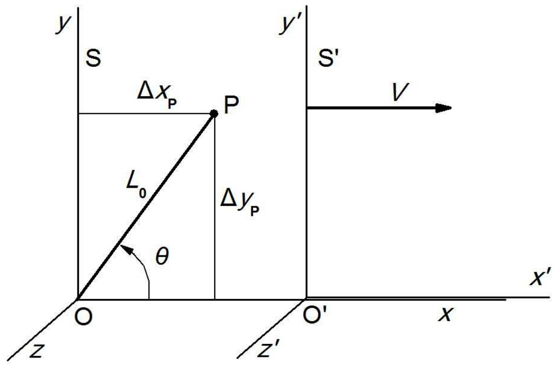
Τ Ο Μ Ε Α Σ   Φ Υ Σ Ι Κ Η Σ

Επαναληπτική εξέταση στο μάθημα ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

17 Σεπτεμβρίου 2012   Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες   Τα θέματα είναι ισοδύναμα

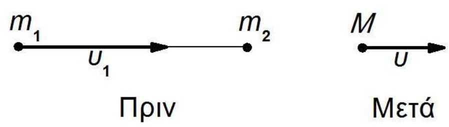
Θέμα 1. (α) Μια ευθεία OP βρίσκεται στο επίπεδο *xy* και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των *x*, στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S. Ποια είναι η γωνία θ' που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x' στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S′, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα S;

(β) Δείξετε ότι το μονοχρωματικό φως από μια πηγή που απομακρύνεται από εμάς ακτινικά με ταχύτητα 0,6c έχει διπλάσιο μήκος κύματος από το μήκος κύματος που έχει στο σύστημα της πηγής.



Θέμα 2. Ένα ουδέτερο καόνιο διασπάται σε δύο πιόνια, $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$. Αν το παραγόμενο αρνητικό πιόνιο είναι ακίνητο, ποια είναι η ολική ενέργεια του θετικού πιονίου; Ποια ήταν η ολική ενέργεια του καονίου; Δίνονται οι μάζες ηρεμίας: του K^0, $m_K = 498\ \text{MeV}/c^2$ και των $\pi^\pm$, $m_\pi = 140\ \text{MeV}/c^2$.

Θέμα 3. Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_1 και ταχύτητα υ_1 συγκρούεται με ακίνητο σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_2. Τα δύο σωματίδια ενώνονται σε ένα συσσωμάτωμα με μάζα ηρεμίας *M*, που κινείται με ταχύτητα υ. Δείξετε ότι είναι $\upsilon = (m_1\gamma_1\upsilon_1)/(m_1\gamma_1 + m_2)$ και $M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2$, όπου $\gamma_1 = 1\big/\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}$.



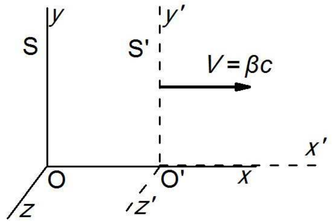
Θέμα 4. Ποια είναι η ενέργεια κατωφλίου για την παραγωγή αντιπρωτονίου ($\bar{p}$) κατά τη σύγκρουση ηλεκτρονίου (*e*) με ακίνητο πρωτόνιο (*p*) κατά την αντίδραση $e + p \to e + p + p + \bar{p}$; Δίνονται οι ενέργειες ηρεμίας: του ηλεκτρονίου $m_e c^2 = 0{,}511\ \text{MeV}$ και του πρωτονίου $m_p c^2 = 938\ \text{MeV}$.

$\Rightarrow \ \Rightarrow \ \Rightarrow$

Τυπολόγιο

Σχετικιστική Κινηματική:

<u>Μετασχηματισμός της θέσης</u>: Αν ένα σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\,\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς S, και οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν $t = t' = 0$, τότε:



$$x' = \gamma\left(x - Vt\right) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

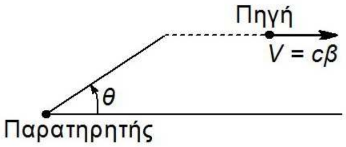
όπου $\beta \equiv \dfrac{V}{c}$ $\quad \gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Συστολή του μήκους: $\Delta l = \Delta l_0 / \gamma$ (Δl_0 = μήκος ηρεμίας, δηλ. για ράβδο ακίνητη)

Διαστολή του χρόνου: $\Delta t = \gamma\,\Delta t_0$ (Δt_0 = ιδιοχρόνος, δηλ. για ρολόι ακίνητο)

<u>Μετασχηματισμός της ταχύτητας</u>: $\upsilon'_x = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}}$, $\quad \upsilon'_y = \dfrac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}$, $\quad \upsilon'_z = \dfrac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}$.

<u>Φαινόμενο Doppler:</u> $\lambda = \lambda_0 \dfrac{1+\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$



Σχετικιστική Δυναμική:

$m_0 = m(0) \qquad m = m(\upsilon) = \gamma m_0$ όπου $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$, υ = ταχύτητα του σωματιδίου

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \gamma m_0 \vec{\boldsymbol{\upsilon}} \qquad E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \qquad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Για φωτόνια: $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda} \qquad E = pc$

<u>Μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας</u>: $p'_x = \gamma\left(p_x - VE/c^2\right) \quad p'_y = p_y \quad p'_z = p_z \quad E' = \gamma\left(E - Vp_x\right)$

<u>Ισοδυναμία μάζας-ενέργειας</u>: $\Delta E = \Delta m\, c^2$

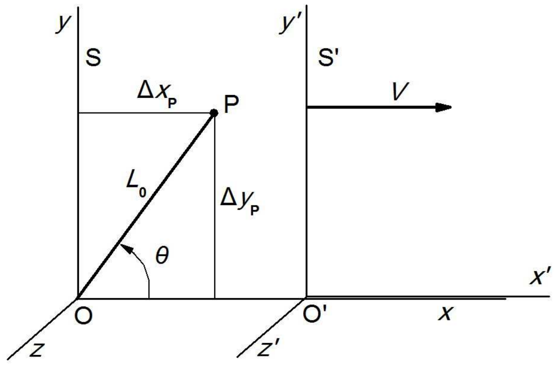
Ηλεκτρομαγνητισμός:

<u>Μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου</u>:

$$E'_x = E_x \qquad E'_y = \gamma\left(E_y - VB_z\right) \qquad E'_z = \gamma\left(E_z + VB_y\right)$$

$$B'_x = B_x \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + VE_z/c^2\right) \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - VE_y/c^2\right)$$

Θέμα 1. (α) Μια ευθεία OP βρίσκεται στο επίπεδο xy και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x, στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S. Ποια είναι η γωνία θ' που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x' στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S΄, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα S;



(β) Δείξετε ότι το μονοχρωματικό φως από μια πηγή που απομακρύνεται από εμάς ακτινικά με ταχύτητα 0,6c έχει διπλάσιο μήκος κύματος από το μήκος κύματος που έχει στο σύστημα της πηγής.

ΛΥΣΗ

(α) Οι προβολές της ευθείας πάνω στους δύο άξονες του συστήματος S έχουν μήκη

$$\Delta x_{\rm P} = L_0 \cos\theta \qquad \text{και} \qquad \Delta y_{\rm P} = L_0 \sin\theta \,.$$

Στο σύστημα S΄, αυτά τα μήκη είναι

$$\Delta x'_{\rm P} = \Delta x_{\rm P} / \gamma = \left(L_0 \cos\theta\right) / \gamma \qquad \text{και} \qquad \Delta y'_{\rm P} = \Delta y_{\rm P} = L_0 \sin\theta \,.$$

Επομένως, η κλίση θ' της ευθείας στο σύστημα αναφοράς S΄ δίνεται από τη σχέση

$$\tan\theta' = \frac{\Delta y'_{\rm P}}{\Delta x'_{\rm P}} = \frac{L_0 \sin\theta}{\left(L_0 \cos\theta\right)/\gamma} \qquad \tan\theta' = \gamma \tan\theta \qquad \text{ή} \qquad \theta' = \arctan\left(\gamma \tan\theta\right).$$

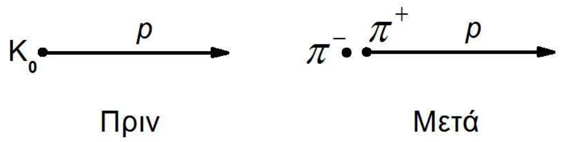
(β) Στο φαινόμενο Ντόπλερ, η σχέση ανάμεσα στα μήκη κύματος είναι $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$, όπου το β θεωρείται θετικό όταν η πηγή απομακρύνεται από εμάς. Για $\beta = 0{,}6$, είναι

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+0{,}6}{1-0{,}6}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1{,}6}{0{,}4}} = \lambda_0 \sqrt{4} = 2\lambda_0$$

Θέμα 2. Ένα ουδέτερο καόνιο διασπάται σε δύο πιόνια, $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$. Αν το παραγόμενο αρνητικό πιόνιο είναι ακίνητο, ποια είναι η ολική ενέργεια του θετικού πιονίου; Ποια ήταν η ολική ενέργεια του καονίου; Δίνονται οι μάζες ηρεμίας: του K^0, $m_{\mathrm{K}} = 498\ \mathrm{MeV}/c^2$ και των $\pi^\pm$, $m_\pi = 140\ \mathrm{MeV}/c^2$.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι η μάζα ηρεμίας του K^0 είναι M και των $\pi^\pm$ είναι m. Η διάσπαση φαίνεται στο σχήμα.



Αφού το π^+ είναι το μόνο σωματίδιο που κινείται μετά τη διάσπαση, η διατήρηση της ορμής υπαγορεύει η ορμή του να είναι ίση με την ορμή **p** του K^0. Αν E_K είναι η ολική ενέργεια του K^0, η διατήρηση της ενέργειας μας δίνει

$$E_K = mc^2 + mc^2\gamma, \tag{1}$$

Όμως, η ολική ενέργεια του π^+ είναι

$$E_\pi = mc^2\gamma = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \left(pc\right)^2} \tag{2}$$

και του καονίου

$$E_K = \sqrt{\left(Mc^2\right)^2 + \left(pc\right)^2}\,. \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2) και (3) στην (1), έχουμε

$$\sqrt{\left(Mc^2\right)^2 + \left(pc\right)^2} = mc^2 + \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \left(pc\right)^2}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο,

$$\left(Mc^2\right)^2 + \cancel{\left(pc\right)^2} = \left(mc^2\right)^2 + \left(mc^2\right)^2 + \cancel{\left(pc\right)^2} + 2mc^2\sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \left(pc\right)^2}$$

$$\left(Mc^2\right)^2 - 2\left(mc^2\right)^2 = 2mc^2 E_\pi$$

και, επομένως,

$$E_\pi = mc^2\left(\frac{M^2}{2m^2} - 1\right)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (1),

$$E_K = mc^2 + E_\pi = mc^2\left(\frac{M^2}{2m^2}\right) \quad \text{ή} \quad E_K = \frac{M^2c^2}{2m}.$$

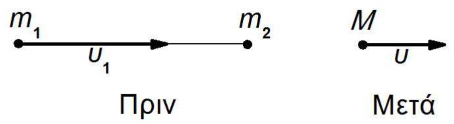
Η ολική ενέργεια του θετικού πιονίου είναι:

$$E_\pi = 140 \times \left(\frac{498^2}{2\times 140^2} - 1\right) = 746\ \mathrm{MeV}.$$

Για το καόνιο βρίσκουμε:

$$E_K = \frac{498^2}{2\times 140} = 886\ \mathrm{MeV}.$$

Θέμα 3. Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_1 και ταχύτητα υ_1 συγκρούεται με ακίνητο σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_2. Τα δύο σωματίδια ενώνονται σε ένα συσσωμάτωμα με μάζα ηρεμίας *Μ*, που κινείται με ταχύτητα υ. Δείξετε ότι είναι $\upsilon = (m_1\gamma_1\upsilon_1)/(m_1\gamma_1 + m_2)$ και $M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2$, όπου $\gamma_1 = 1\big/\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}$.



ΛΥΣΗ

Οι αρχές διατήρησης δίνουν:

Ενέργεια: $$m_1 c^2 \gamma_1 + m_2 c^2 = M c^2 \gamma \qquad (1)$$

Ορμή: $$m_1 \gamma_1 \upsilon_1 = M\gamma\upsilon \qquad (2)$$

όπου $\gamma = 1\big/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$. Απαλείφοντας το γινόμενο $M\gamma$ ανάμεσα στις Εξ. (1) και (2), έχουμε

$$m_1\gamma_1\upsilon_1 = m_1\gamma_1\upsilon + m_2\upsilon, \qquad \text{η οποία δίνει} \qquad \upsilon = \frac{m_1\gamma_1\upsilon_1}{m_1\gamma_1 + m_2}.$$

Από αυτή την τιμή προκύπτει ότι $$\frac{1}{\gamma^2} = 1-\beta^2 = 1-\left(\frac{m_1\gamma_1\beta_1}{m_1\gamma_1+m_2}\right)^2.$$

Υψώνοντας την Εξ. (1) στο τετράγωνο και αντικαθιστώντας για το $1/\gamma^2$, έχουμε

$$M^2 = \frac{1}{\gamma^2}(m_1\gamma_1 + m_2)^2 = (m_1\gamma_1 + m_2)^2 - m_1^2\gamma_1^2\beta_1^2,$$

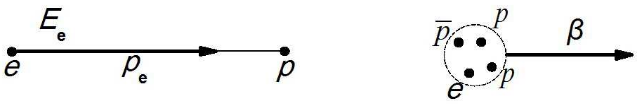
$$M^2 = m_1^2\gamma_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2\gamma_1 - m_1^2\gamma_1^2\beta_1^2, \qquad M^2 = m_1^2\gamma_1^2\left(1-\beta_1^2\right) + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2$$

και, τελικά, $$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2.$$

Θέμα 4. Ποια είναι η ενέργεια κατωφλίου για την παραγωγή αντιπρωτονίου ($\bar{p}$) κατά τη σύγκρουση ηλεκτρονίου (e) με ακίνητο πρωτόνιο (p) κατά την αντίδραση $e+p \to e+p+p+\bar{p}$; Δίνονται οι ενέργειες ηρεμίας: του ηλεκτρονίου $m_e c^2 = 0{,}511\,\text{MeV}$ και του πρωτονίου $m_p c^2 = 938\ \text{MeV}$.

ΛΥΣΗ

Για διαθέσιμη ενέργεια ίση με την ενέργεια κατωφλίου, τα σωματίδια που παράγονται θα είναι ακίνητα στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, επομένως, όλα τα παραγόμενα σωματίδια θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα, έστω βc , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Πριν Μετά

Έχουμε,

διατήρηση της ενέργειας: $$E_e + m_p c^2 = \left(3m_p + m_e\right)c^2\gamma \qquad (1)$$

διατήρηση της ορμής: $$p_e c = \sqrt{E_e^2 - \left(m_e c^2\right)^2} = \left(3m_p + m_e\right)c^2\beta\gamma \qquad (2)$$

όπου E_e και p_e είναι η ενέργεια και ορμή, αντίστοιχα, του προσπίπτοντος ηλεκτρονίου.
Η Εξ. (1) δίνει

$$E_e^2 = \left(3m_p + m_e\right)^2 c^4\gamma^2 - 2m_p c^2\left(3m_p + m_e\right)c^2\gamma + \left(m_p c^2\right)^2$$

και η Εξ. (2)

$$E_e^2 = \left(3m_p + m_e\right)^2 c^4\beta^2\gamma^2 + \left(m_e c^2\right)^2 .$$

Εξισώνοντας, και διαιρώντας διά c^4 προκύπτει η σχέση

$$\left(3m_p + m_e\right)^2\gamma^2\left(1-\beta^2\right) - 2m_p\left(3m_p + m_e\right)\gamma + m_p{}^2 - m_e{}^2 = 0 .$$

Όμως, $\gamma^2\left(1-\beta^2\right) = 1$ και έτσι

$$9m_p{}^2 + 6m_e m_p + \cancel{m_e{}^2} - 2m_p\left(3m_p + m_e\right)\gamma + m_p{}^2 - \cancel{m_e{}^2} = 0$$

$$\gamma = \frac{10m_p{}^2 + 6m_e m_p}{2m_p\left(3m_p + m_e\right)} = \frac{5m_p + 3m_e}{3m_p + m_e}$$

Επομένως,

$$E_e = \cancel{\left(3m_p + m_e\right)}\frac{5m_p + 3m_e}{\cancel{3m_p + m_e}}c^2 - m_p c^2 = \left(4m_p + 3m_e\right)c^2 .$$

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι:

$$K_e = E_e - m_e c^2 = 2\left(2m_p + m_e\right)c^2 .$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε την ενέργεια κατωφλίου $K_e = 2\left(2\times 938 + 0{,}511\right) = 3753\ \text{MeV}$.